2024年　秋期講演

武雄高校・鹿島高校
秋期講演（11月10日）
整関数の微分・積分

定松 勝幸 編

PROJECT THEATER SEMINAR
東大･京大･国公立医学部･早慶の受験から高校の補習まで対応

2024 年 武雄高校・鹿島高校 秋期講演

（2024 年[令和 6 年] 11 月 10 日）

【はじめに】

２時間×2 回という短い時間のため，ひとつの分野に限定しました。今回は，数学Ⅱの範囲である『整関数の微分・積分』です。これは，共通テストでも 2 次試験でも出題される範囲です。そのため，両方の対策を同時に行います。

共通テストと 2 次試験の対策は異なります。このことを意識して勉強していないと，本番の試験では,『本人の数学の学力』とは異なるところで点を失ってしまいます。

共通テストの場合は，マークセンス方式ですから，論述答案を書きません。答えがあっていれば，その答えを得る作業工程は答案にしませんから，いかに素早く答えを得るかが大事になります。制限時間に対する問題量が多いこともあり，答えを得るまでの時間をかけては，制限時間内で解くことも困難になります。スピードが勝負なのです。この授業では，共通テスト対策として『いかに素早く解くか』を講義します。

２次試験においては，論述答案を書く必要があります。当然ですが，答えをマークするのとは違い，答案を書くのには時間がかかります。制限時間があるわけですから，解法の選択を誤ると，解けても時間オーバーになることもあります。複数の解法が考えられる中で，どの解法を選択するかが大事になります。そのため，２次試験対策として，『解法の選択方法』を講義します。

この授業を受講する生徒さんは，学力も異なり，受験する大学も異なると思います。私の講演がより良いものになるように，各生徒さんの実力，および，やる気に応じた予習の仕方を準備しました。【数学が得意な人用】【数学が苦手な人用】【やる気がある人用】です。“やる気がある人”とは，数学が得意な人の意味ではありません。数学は苦手だが努力してできるようになりたい人も含みます。もちろん，数学が得意でさらにやる気がある人も大歓迎です。

今回の講演で，みなさんたちの学力が大きく飛躍するように，できる限りのサポートをしてあげたいと思います。

2024 年[令和 6 年]秋　　プロジェクトシアター代表　定松勝幸

【数学が得意な人用】

ストップウォッチを用意してください。スマホなどについているものでもいいです。

このテキストの 13 題を『答えのみを求める』という方式で，時間を計ってやってみてください。『答えのみを求める』のために，誘導になっている小問は省略して解いてください。すなわち，各問題において，小問(1)(2)があるものは，(1)をやらないで(2)だけでかまいません。(2)の答えがあっていれば，正解とします。
したがって，答えだけを求めてほしい問題は，
【１】,【２】,【３】,【４】(2),【５】(2),【６】(2),【７】,【８】(2),【９】(2),
【１０】(2),【１１】【１２】【１３】の 13 題です。

答えを求めるだけでよいです。暗算でできる問題もたくさんありますから、答えだけでかまいません。何分かかりましたか。以下を参考にしてください。

【10 分未満】私といい勝負ができます。私はストップウォッチで測ったら,13 題を解くのにかかった時間は 6 分 47 秒でした。受験生の中でこの 13 題を 10 分未満で解くことができるのは，日本では 3 人くらい（インドなら 100 人以上いるはずですが…）だと思います。日本で 3 番以内に入れるでしょう。さらに，私より早かった場合は，ほぼ間違いなく，受験生では日本で 1 番だと思います。
　この速さで解くためには,[問題を読んで内容を把握するのが一瞬であること],[その問題を解くのに必要な解法を複数知っており，その中から答えを求めるのに最も早い解法が選択できること]，さらに,[すばやく計算するための計算技術をもっていること]などが必要です。共通テスト用の解法と 2 次試験用の解法を使い分ける能力も必要なのです。そのため,10 分未満で 13 題全問を解くことができた生徒さんは，学力に関しては申し分ない状態で，合格できない大学はあり得ないと思います。

【10 分以上 20 分未満】私の教室で勉強している東大志望の生徒さんと同じレベルです。日頃から私の指導を受けている生徒さんで実際に試してみました。この時間で 13 題全問を解き終わる(もちろん全問正解でなければ意味がありません)生徒さんなら，間違いなく，東京大学・京都大学は楽勝でしょう。

【20 分以上 30 分未満】受験生としては，早い方です。共通テストで満点がとれそうです。さらに，時間も余りそうです。さらなる努力で，私の教室で勉強している生徒さんと勝負できるくらいになってください。

【30 分以上 40 分未満】これが共通テストで満点を狙えるぎりぎりのラインです。授業を聞いて，もう少しスピードをあげるテクニックを身に付けましょう。

【40 分以上】時間がかかりすぎています。授業を聞いて，何が悪いのかをしっかり確認してください。きっと，過去にも「もっと時間があったら解けたのに」という経験をしているはずです。時間がかかる大きな原因は，解法の選択の失敗だと思います。

【数学が苦手な人用】

数学が苦手な人は，いきなり私の講演を聴いても，そのレベルについていけないこともあり得ます。そこで，この講演において，余裕でついてこられるために，以下の１７題の基礎問題をあらかじめやっておいてください。数学が苦手な人は，必ずやっておいてください。

ひとりでやれるように，解答も付けておきました。また，解答だけではわからない場合のために，参考になる NEW ACTION LEGEND(ニューアクションレジェンド)数学ⅡＢ のページまたは例題を載せておきました。以下の NAL は NEW ACTION LEGEND(ニューアクションレジェンド)の略です。

解答を見ても理解できない場合は，必ず，足立先生(武雄高校),梶原先生(鹿島高校)に質問して，授業当日までに，基礎問題の 17 題だけはできるようにしておいてください。

＜基礎問題＞

これは授業ではやりませんが，少しコメントすることはあります。

【１】因数定理を書いてください。

【２】方程式 $x^3-7x+6=0$ を解きなさい。

【３】次の条件を満たす３次の整式 $f(x)$ をそれぞれ求めなさい。

（１）$f(-1)=0$，$f(1)=12$，$f(2)=0$，$f(3)=0$ のとき

（２）$f(-2)=0$，$f(-1)=10$，$f(1)=0$，$f(2)=4$ のとき

【４】２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の２解を α,β とするとき，解と係数の関係の公式を書いてください。

【５】２次方程式 $2x^2+4x+a=0$ (a は実数の定数)の解のひとつが -3 のとき,もうひとつの解を求めなさい。

【６】3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の 3 解を α,β,γ とするとき，解と係数の関係の公式を書いてください。

【７】3 次方程式 $3x^3-12x^2+ax+b=0$ (a,b は実数の定数)の 2 解が 2,3 のとき，残りのひとつの解を求めなさい。

【８】２次方程式 $ax^2+6x+3=0$ $(a$ は実数の定数$)$が重解をもつときの a の値を求めなさい。

【９】３次方程式 $2x^3+ax+32=0$ $(a$ は実数の定数$)$が実数の重解をもつときの a の値を求めなさい。

【１０】傾きmがで点(x_0, y_0)を通る直線の方程式の公式を書いてください。

【１１】曲線 $y=x^3-3x^2$ 上の点$(1,-2)$における接線の方程式を求めなさい。

【１２】曲線 $y=x^2-2x+2$ に点$(2,-2)$から引いた接線の方程式を求めなさい。

【１３】（公式）$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$ を証明してください。

【１４】$\int_{1-\sqrt{5}}^{1+\sqrt{5}}(-3x^2+6x+12)\,dx$ を計算しなさい。

【１５】$\int_{-1}^{1}(x+1)^2(x+2)dx$ を計算しなさい。

【１６】３つの数 a, b, c がこの順に等差数列をなす条件を書いてください。

【１７】３つの数 $-x^2+2x-3,$ $x^2+x-1,$ $2x^2+3x-1$ がこの順に等差数列をなすような x を求めなさい。

＜基礎問題の解答＞

【１】整式 $f(x)$ において $f(\alpha)=0$ のとき，$f(x)$ は $(x-\alpha)$を因数にもつ。

【２】$x^3-7x+6=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x+3)=0 \Leftrightarrow x=1,2,-3$
(NAL 数学ⅡB 例題 50 (1))

【３】（１）$f(-1)=0, f(2)=0, f(3)=0$ より，$f(x)=a(x+1)(x-2)(x-3)$とおくと，$f(1)=12$より，$4a=12 \Leftrightarrow a=3$
よって，$f(x)=3(x+1)(x-2)(x-3)$
（２）$f(-2)=0\ f(1)=0$ より，$f(x)=(x+2)(x-1)(ax+b)$とおくと，
$\begin{cases} f(-1)=10 \\ f(2)=4 \end{cases}$ より，$\begin{cases} -2(-a+b)=10 \\ 4(2a+b)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}$
よって，$f(x)=(x+2)(x-1)(2x-3)$

【４】$\begin{cases} \alpha+\beta=-\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a} \end{cases}$　(NAL 数学ⅡB　p.64)

【５】もうひとつの解を α とおくと，解と係数の関係より，$(-3)+\alpha=-2 \Leftrightarrow \alpha=1$

【６】$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$　(NAL 数学ⅡB　p.99)

【７】残りのひとつの解を α とおくと，解と係数の関係より，$2+3+\alpha=4 \Leftrightarrow \alpha=-1$

【８】$\dfrac{(\text{判別式})}{4}=3^2-a\cdot 3=0 \Leftrightarrow a=3$

【９】３解を α,α,β とおくと，解と係数の関係より，
$\begin{cases} \alpha+\alpha+\beta=0 \\ \alpha\cdot\alpha+\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\beta=\dfrac{a}{2} \\ \alpha\cdot\alpha\cdot\beta=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=-4 \\ a=-24 \end{cases}$

【１０】$y=m(x-x_0)+y_0$

【１１】$f(x)=x^3-3x^2$ とおくと，$f'(x)=3x^2-6x$ より $f'(1)=-3$
よって，接線の方程式は $y=-3(x-1)-2 \Leftrightarrow y=-3x+1$
(NAL 数学ⅡB 例題 217 (1))

【１２】$f(x)=x^2-2x+2$ とおくと，$f'(x)=2x-2$ であるから，

接点(t, t^2-2t+2)における接線は，

$y=(2t-2)(x-t)+t^2-2t+2 \Leftrightarrow y=(2t-2)x-t^2+2$

これが点$(2,-2)$を通る条件は，$-2=(2t-2)\cdot 2-t^2+2 \Leftrightarrow t=0,4$

よって，求める接線は，$y=-2x+2$ と $y=6x-14$

（NAL 数学ⅡB 例題 218 (1) ）

【１３】$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}dx$

$$=\int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}dx$$

$$=\left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}-\frac{(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2}{2}\right]_\alpha^\beta$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)^3}{3}-\frac{(\beta-\alpha)^3}{2}$$

$$=-\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

（NAL 数学ⅡB 例題 249[1] ）

【１４】$-3x^2+6x+12=0$ とすると $x=\alpha(=1-\sqrt{5}), \beta(=1+\sqrt{5})$ だから，

$$\int_{1-\sqrt{5}}^{1+\sqrt{5}}(-3x^2+6x+12)\,dx=\int_\alpha^\beta\{-3(x-\alpha)(x-\beta)\}dx=-3\cdot\left\{-\frac{(2\sqrt{5})^3}{6}\right\}=20\sqrt{5}$$

（NAL 数学ⅡB 例題 249[2](2) ）

【１５】$\int_{-1}^1 (x+1)^2(x+2)dx=\int_{-1}^1 (x+1)^2\{(x+1)+1\}dx$

$$=\int_{-1}^1\{(x+1)^3+(x+1)^2\}dx$$

$$=\left[\frac{(x+1)^4}{4}+\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^1=\frac{20}{3}$$

（NAL 数学ⅡB 例題 246(2)改 ）

【１６】$2b=a+c$　（NAL 数学ⅡB　p.474）

【１７】$2(x^2+x-1)=(-x^2+2x-3)+(2x^2+3x-1)$

$\Leftrightarrow\ x^2-3x+2=0\ \Leftrightarrow\ x=1,2$

【やる気がある人用】

やる気のある人は，予習を薦めます。また，予習答案を書いて提出すれば，添削した返却します。やる気があればよいので，全くできなくて白紙になった答案でも，途中で挫折した答案でも，提出してかまいません。予習に関しては，以下を参考にしてください。

（予習について）

予習とは，“解いてくる”を指すわけではありません。予習ですらすら解けるのであれば，教師は不要です。現在の実力で解けるか否かを確認してくることが重要なのです。そこで『何がわかっていて，何がわかっていないか』を自分なりに整理しておくことが大切です。

実際の講義を聴いてみたら，『何がわかっていて，何がわかっていないか』がわかっていなかった，と悟ることもよくあることです。つまり，多くの学生は“わかっている”と勘違いしていることがたくさんあるのです。その勘違いに気づくことが今後の大きな進歩につながります。

解けなかった問題を復習したのにもかかわらず，また同じような問題でミスした経験を持つ学生はたくさんいます。復習したのになぜまた同じようなミスをするのか？それは，過去の解けなかった問題に関して，“なぜ解けなかったのか？”の分析ができていなかったからなのです。解けなかった問題をただ何回も解き直しても実力はつきません。解けなかった理由の分析が重要なのです。

予習の段階で方針すら立たない場合は，さっさとあきらめてください。「方針すら立たなかった」という事実を確認してくることが予習です。決して，解けるまで粘ろうなんて考えないでください。入試までの時間は有限です。粘ることは悪いことではありませんが，『虚しく時が過ぎ去る』は避けたいものです。さっさと挫折することも“時間の有効活用”と考えれば，進歩の１つです。そこで挫折した生徒のために教師はいるのです。

予習の段階で方針が立った場合は，答案を作成してください。この答案は，入試の本番で論述答案として提出するものを作成してください。東大も京大も論述答案を書く必要があります。たとえ答えが正解でも，途中の論述に不備があれば，減点になるか，場合によっては０点になることもあります。そのため、日ごろから論述答案を書く習慣をつけておく必要があります。特に，東大・京大をはじめとする国立大学の難関大学は同値性に関する記述を重視します。正しい答えが得られていても，「同値性に問題あり」で減点されることは非常に多いのです。

予習の段階で方針は立ったけれど，実際に解いてみると，途中から泥沼にはまり結論が出なかった，という場合もあると思います。この場合は，そもそも最初に立てた方針自体が間違っているケース，最初に立てた方針は正しいがそれを実現するための計算技術が欠如していたケースなどが考えられます。このような場合は，予習ノートにその泥沼に入るまでの答案を残しておくことが重要です。これが予習です。

以上をまとめますと，生徒の実力に応じて予習は３パターンくらい考えられます。

（パターン１・・・方針すら立たなかった）
さっさと挫折し,「全く方針も立てきれないで挫折した」という事実を確認し，当日の講師の解説に期待する。当日の講義では,「なぜ挫折するに至ったか？」をチェックし，反省点をメモしながら，正解を板書する。

（パターン２・・・方針は立ったが途中で泥沼にはまってしまった）
泥沼にはまるまでの過程をノートに残し、当日の講義に臨む。当日の講義では，当日の講義では,「立てた方針は正しかったのか？」「計算技術に問題はなかったのか？」などを意識しながら，自分の書いた答案をチェックしながら，正解を板書する。

（パターン３・・・最後まで解けた）
本番の試験と同じ気持ちで，ノートに論述答案を書き，当日の講義に臨む。当日の講義では,「ほんとうに解けていたのか？」「同値性などで減点されることはないのか？」などを丁寧にチェックしながら，自分が書いた答案を厳しく採点する。

やる気のある生徒さんは，予習答案を提出してくれたら添削して返却します。予習答案は，国立大学の２次試験でこの問題が出題されたとき，自分が答案用紙に書く内容を書いてください。このとき，方針すら立たない問題は「方針も立ちませんでした。」と書いて提出してください。途中で挫折した場合は、挫折したところまでの答案を提出してください。

提出する答案には自分の名前だけでなく第一志望の大学・学部を書いておいてくだされば，その大学での採点基準で採点し，添削します。

同じ問題でも，大学により採点基準が異なります。そのことを知らない学生さんは非常に多いので，今後の参考になると思います。

提出方法は，この講演の担当である足立先生(武雄高校)，梶原先生(鹿島高校)に直接渡してください。

提出期限は１０月２５日とします。１０月２５日の時点で担当の先生に渡された物を有効とします。早く提出されたら，それだけ丁寧な添削を受けることができます。添削を希望する人は，締切日の１０月２５日にこだわらず，すぐに担当の先生に提出することをお勧めします。

#【講演用問題】ここからの 13 題を授業でやります。

【１】２次関数 $C: y=3x^2-6x-9$上の 2 点 A$(2,-9)$,B$(4,15)$を通る直線を l とするとき, C と l とで囲まれた部分の面積を求めなさい。

【２】2 次関数 $C: y=2x^2+3x-5$と直線 $l: y=-3x-8$ で囲まれた部分の面積を求めなさい。

【３】２つの２次関数 $C_1: y=5x^2+7x+3$と $C_2: y=2x^2-5x-6$ で囲まれた部分の面積を求めなさい。

【４】２次関数 $C: y=2x^2-8x+5$ に点 A$(4,-13)$から引いた 2 本の接線のうち, 接点の x 座標が小さい方を l_1, 大きい方を l_2とし, 直線 $x=4$ を l とし, C と l と l_1 で囲まれた部分の面積を S_1, C と l と l_2で囲まれた部分の面積を S_2とするとき, 次の問いに答えなさい。

（１）S_1 を求めなさい。

（２）$S_1 : S_2$ を求めなさい。

【５】2 つの 2 次関数 $C_1: y=5x^2-9x+13$, $C_2: y=3x^2+7x+a$ (a は実数の定数) が接しているとき, 次の問いに答えなさい。

（１）a の値を求めなさい。

（２）C_1 と C_2 と直線 $l: x=1$ で囲まれた部分の面積を求めなさい。

【６】2 次関数 $C: y=x^2$ に点A$(1,-3)$から 2 本の接線 l_1, l_2 を引いたとき, 次の問いに答えなさい。

（１）2 つの接点の座標を求めなさい。

（２）C, l_1, l_2で囲まれた部分の面積を求めなさい。

【７】２次関数 $C: y=-2x^2+4x+16$ に２点 $\mathrm{A}(3,10)$, $\mathrm{B}(5,-14)$をとり，点Ａにおける接線を l_1，点Ｂにおける接線を l_2，直線ABを l_3 とする。C と l_1 と l_2 で囲まれた部分の面積を S_1 とし，C と l_3 で囲まれた部分の面積を S_2 としたとき，$S_1 : S_2$ を求めなさい。

【８】点$\mathrm{A}(1,-7)$を通り２次の係数が-1である２次関数で，２次関数 $C: y=x^2$ に接するものは２つある。接点の x 座標が小さい順に C_1, C_2 とする。このとき，次の問いに答えなさい。

（１）C と C_1 の接点の座標，C と C_2 の接点の座標をそれぞれ求めなさい。

（２）C, C_1, C_2 で囲まれた部分の面積を求めなさい。

【９】２つの２次関数 $C_1: y=x^2-7x+10$, $C_2: y=x^2+x+2$ の共通接線を l とするとき，次の問いに答えなさい。

（１）l の方程式を求めなさい。

（２）C_1, C_2 , l で囲まれた部分の面積を求めなさい。

【１０】２つの２次関数 $C_1: y=x^2-7x+10$, $C_2: y=x^2+x+2$ の両方に接する２次の係数が-1である２次関数を C とするとき，次の問いに答えなさい。

（１）C と C_1 の接点の座標，C と C_2 の接点の座標をそれぞれ求めなさい。

（２）C_1, C_2 , C で囲まれた部分の面積を求めなさい。

【１１】３次関数 $C: y=2x^3-6x^2+5x+7$ 上の点 $\mathrm{A}(2,9)$における接線を l とするとき，C と l で囲まれた部分の面積を求めなさい。

【１２】xy平面上の曲線 C： $y=x^3-11x^2+21x-10$ と直線 l： $y=-10x+11$ で囲まれた部分の面積を求めなさい。

【１３】xy平面上の曲線 C： $y=x(x-1)^2$ と直線 l： $y=kx\ (0<k<1)$ で囲まれた２つの部分の面積が等しくなるような k の値を求めなさい。